الاتصال و النهايات ذ الرقبة www.0et1.com

اتصال دالة في نقطة

مبرهنة :

f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0.

الدالة f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت للدالة نهاية في x_0 تساوي $f(x_0)$.

وهذا يعني $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad f$ متصلة في x_0

1) العمليات على الدوال المتصلة

أ- مبرهنة

f و g دالتين متصلتين في x_0. وليكن λ عددا حقيقيا.

لدينا :

- $f+g$ و $f.g$ و λf دوال متصلة في x_0.
- إذا كان $g(x)\neq 0$ فإن $\dfrac{1}{g}$ و $\dfrac{f}{g}$ متصلتان في x_0.

ب- نتيجة :

إذا كانت f_1 و f_2 و ... و f_n دوال متصلة في x_0 فإن الدالتين $f_1+f_2+\ldots+f_n$ و $f_1\times f_2\times\ldots\times f_n$ متصلتان في x_0.

ج- مبرهنة :

- الدالة الحدودية متصلة في كل نقطة من $\mathbb{R}$.
- الدالة الجذرية متصلة في كل نقطة من حيز تعريفها.

د- مبرهنة :

إذا كانت f متصلة في x_0 و g دالة متصلة في $f(x_0)$ فإن الدالة gof متصلة في x_0.

هـ- نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة في x_0 فإن الدالة $x\to |f(x)|$ متصلة في x_0.

2) العمليات على النهايات

أ- مبرهنة :

لتكن f و g دالتين لكل منهما نهاية في x_0 وليكن λ عددا حقيقيا.

لدينا :

- $f+g$ و $f.g$ و λf لها أيضا نهاية في x_0. ولدينا :

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f.g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x).\lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x)=\lambda\lim_{x\to x_0} f(x)$$

- إذا كانت نهاية g غير منعدمة فإن :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

ب- نهايات دوال مثلثية :

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}=1$

جـ- تركيب دالة متصلة ودالة تقبل نهاية :

(مبرهنة)

إذا كانت f دالة تقبل نهاية l في x_0 و g دالة متصلة في l فإن الدالة gof تقبل النهاية $g(l)$ في x_0.

د- النهايات والترتيب (مبرهنة) :

- ⁕ إذا كان لدالتين f و g نهاية في x_0 وكان لدينا $f \leq g$ في مجال منقط مفتوح مركزه x_0 فإن :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

- ⁕ إذا كان لدينا $h \leq f \leq g$ في مجال منقط مفتوح مركزه x_0 و $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

فإن f تقبل نفس النهاية l في x_0.

الاتصال على اليمين – الاتصال على اليسار.
النهاية على اليمين – النهاية على اليسار.

(1

- خاصيات :

- ⁕ الدالة f متصلة في x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \succ x_0}} f(x) = f(x_0)$
- ⁕ الدالة f متصلة في x_0 على اليسار إذا وفقط إذا كان $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \prec x_0}} f(x) = f(x_0)$

مبرهنة :

الدالة f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة في x_0 على اليمين ومتصلة في x_0 على اليسار.

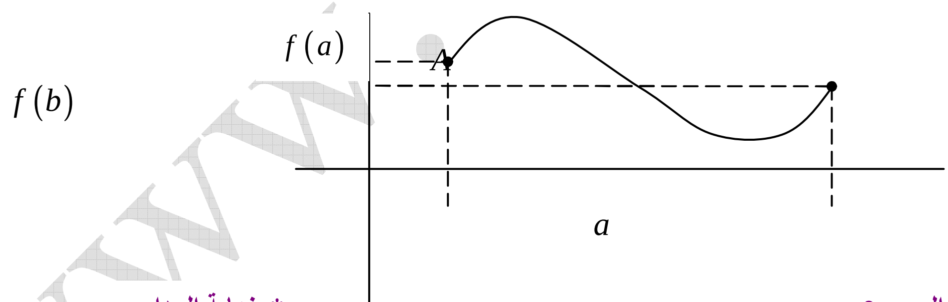
2) الاتصال على مجال

أ- تعريف :

- ⁕ الدالة f متصلة على المجال $]a,b[$ إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a,b[$.
- ⁕ الدالة f متصلة على المجال $[a,b]$ إذا كانت متصلة على $]a,b[$ ومتصلة في a على اليمين ومتصلة في b على اليسار.

ب- ملحوظة :

التمثيل المبياني لدالة متصلة على المجال $[a,b]$ هو قوس منحنى متصل طرفاه هما $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$.



⁕ نهاية المجموع :

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

⁕ نهاية الجداء :

نهاية f	نهاية g	نهاية $f.g$
l	l'	$l.l'$
$l \prec 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l \prec 0$	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	$+\infty$	شكل غير محدد
$l \succ 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l \succ 0$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

* **نهاية جداء دالة في عدد حقيقي :**

ليكن λ عددا حقيقيا.

نهاية f	نهاية λ	نهاية λf
$+\infty$	$\lambda \prec 0$	$-\infty$
$+\infty$	$\lambda \succ 0$	$+\infty$
$-\infty$	$\lambda \prec 0$	$+\infty$
$-\infty$	$\lambda \succ 0$	$-\infty$

* **نهاية مقلوب دالة :**

نهاية f	نهاية $\frac{1}{f}$
$-\infty$	**0**
$+\infty$	**0**
0	• $+\infty$ إذا كان $f(x) \succ 0$ • $-\infty$ إذا كان $f(x) \prec 0$

* **نهاية خارج دالتين : نهاية $\frac{f}{g}$**

تستنتج من المبرهنات السابقة باعتبار :

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

أ- نهاية دالة حدودية ــ نهاية دالة جذرية

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. لدينا :

❋ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

❋ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ **إذا كان n زوجيا.**

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ **إذا كان n فرديا.**

❋ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{-n} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

❋ **نهاية دالة حدودية عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو $-\infty$) هي نهاية حدها الأعلى درجة.**

❋ **نهاية دالة جذرية عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو $-\infty$) هي نهاية خارج حديها الأعلى درجة.**

جـ- نهاية دالة حدودية ــ نهاية دالة جذرية

مبرهنة :

نعتبر الدالتين f و g بحيث $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in I$ حيث : $I =]x_0 - a, x_0 + a[$ و $a \succ 0$.

* **إذا كان** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ **فإن** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

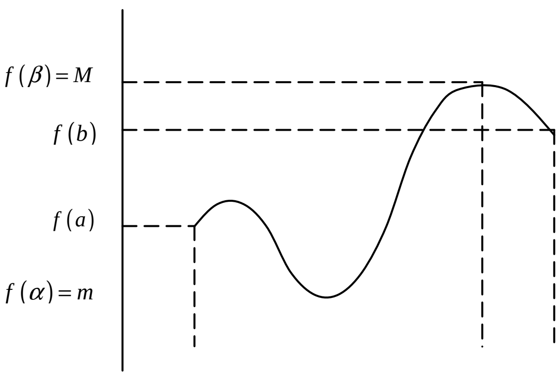
* **إذا كان** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ **فإن** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

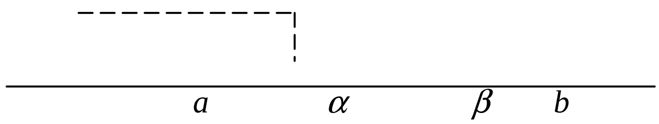
الدالة العكسية

صورة قطعة بدالة متصلة

1) مبرهنة :

صورة قطعة $[a,b]$ بدالة متصلة على $[a,b]$ هي أيضا قطعة $[m,M]$.





2) خاصيات :

* إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ فإنه يوجد عددان حقيقيان α و β من المجال $[a,b]$ بحيث تكون f شمولية من $[a,b]$ نحو $\left[f(\alpha), f(\beta)\right]$

$f(\alpha)$ و $f(\beta)$ هما على التوالي القيمة الدنوية والقيمة القصوية للدالة f على المجال $[a,b]$.

* إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ وتصاعدية قطعا على $[a,b]$ فإن $f(\alpha)=f(a)$ و $f(\beta)=f(b)$ أما إذا كانت تناقصية قطعا على $[a,b]$ فإن $f(\alpha)=f(b)$ و $f(\beta)=f(a)$.

الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على قطعة

1) أ- مبرهنة :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ فإن :

- f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $f([a,b])$.
- الدالة f^{-1} متصلة على $f([a,b])$ ولها نفس منحى تغيرات الدالة f.

(f^{-1} تسمى الدالة العكسية للدالة f على المجال $[a,b]$).

ب- مبرهنة :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ فإن التمثيلين المبيانيين في معلم متعامد ممنظم للدالة f ولدالتها العكسية f^{-1} متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم.

جـ- توسيع المبرهنة السابقة :

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ محدودا أو غير محدود.

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على I فإن :

- $f(I)$ مجال من $\mathbb{R}$ و f تقابل من I نحو $f(I)$.
- الدالة f^{-1} متصلة على $f(I)$ ولها نفس منحى تغيرات f.

د- تحديد المجال: $f(I)$

* إذا كان $I=[a,b[$ وكانت f متصلة وتصاعدية قطعا على I

فإن : $f(I)=\left[f(a), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x)\right[$

* إذا كان $I=[a,b[$ وكانت f متصلة وتناقصية قطعا على I

فإن : $f(I)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x), f(a)\right]$

* إذا كان $I=[a,+\infty[$ وكانت f متصلة وتصاعدية قطعا على I

فإن : $f(I)=\left[f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

* إذا كان $I=[a,+\infty[$ وكانت f متصلة وتناقصية قطعا على I

فإن : $f(I)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(a)\right]$

إذا كان $I=]a,b[$ أو $I=]a,+\infty[$ أو $I=]-\infty,+\infty[$ أو $I=]-\infty,b[$ أو $I=]-\infty,b]$ نحدد $f(I)$ بنفس الطريقة.

دالة الجذر من الرتبة n.

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^+\right)$

أ- نتيجة :

الدالة $x \mapsto x^n$ حيث $\left(x \in \mathbb{R}^+ \text{ و } n \in \mathbb{N}^*\right)$ متصلة وتصاعدية قطعا على المجال $\mathbb{R}^+$.

ب- تعريف :

الدالة $x \mapsto x^n$ حيث $\left(x \in \mathbb{R}^+ \text{ و } n \in \mathbb{N}^*\right)$ تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ودالتها العكسية هي $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ وتسمى دالة الجذر من الرتبة n.

جـ- خصائص دالة الجذر من الرتبة n :

❋ $\begin{cases} x = y^n \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

❋ لكل x من $\mathbb{R}^+$ لدينا : $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

❋ لكل x و x' من $\mathbb{R}^+$ لدينا :

$$x = x' \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x'}$$

$$x \succ x' \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} \succ \sqrt[n]{x'}$$

د- العمليات على الجذور من الرتبة n :

ليكن m و n عنصرين من $\mathbb{N}^*$ و a و b عددين من $\mathbb{R}^+$. لدينا :

❋ $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$ ❋ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

❋ $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ❋ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

❋ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ حيث $b \neq 0$.

هـ- اتصال ونهاية مركب دالة ودالة الجذر من الرتبة n : (مبرهنة)

* إذا كانت f دالة موجبة ومتصلة على I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ متصلة أيضا على I.
* إذا كانت f موجبة وتقبل نهاية l في x_0 فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ تقبل النهاية $\sqrt[n]{l}$ في x_0.
* إذا كانت f تؤول إلى $+\infty$ فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ تؤول إلى $+\infty$.

و- القوة الجذرية لعدد موجب قطعا

*** تعريف :**

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و r عددا جذريا غير منعدم.

العدد a^r هو العدد $\sqrt[q]{a^p}$ حيث $r = \dfrac{p}{q}$ و $p \in \mathbb{Z}^*$ و $q \in \mathbb{Z}^*$

يسمى العدد a^r القوة الجذرية للعدد a ذات الأس r.

*** عمليات على القوى الجذرية :**

ليكن a و b عددين من $\mathbb{R}_+^*$ و r و r' عددين جذريين. لدينا :

$$a^r.a^{r'} = a^{r+r'} \quad , \quad \left(a^r\right)^{r'} = a^{r.r'} \quad , \quad \frac{1}{a^r} = a^{-r} \quad , \quad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'} \quad , \quad a^r.b^r = (ab)^r \quad , \quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

الاشتقاق

II- الدوال القابلة للاشتقاق

1 : اشتقاق دالة في نقطة

أ- تعريف :

نقول عن دالة f معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 أنها قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت للدالة $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية l في 0 . العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونرمز له ب : $f'(x_0)$ أو $\frac{df}{dx}$ ونكتب :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

الدالة التآلفية $h \mapsto f'(x_0).h+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة x_0.

ب- مبرهنة :

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي a ودالة φ معرفة في مجال مفتوح مركزه الصفر بحيث :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+a.h+\varphi(h).h \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

العدد a هو العدد المشتق $f'(x_0)$.

جـ- مبرهنة :

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 فإنها متصلة في x_0 .

2 : الاشتقاق على اليمين، الاشتقاق على اليسار

تعريف :

نقول عن دالة f معرفة في مجال على شكل $[x_0, x_0+\alpha[$ $(\alpha \succ 0)$ إنها قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت الدالة $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية l على اليمين في x_0 .

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 على اليمين. ويمز له بالرمز : $f'_d(x_0)$

ونكتب : $$f'_d(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\succ x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

نعرف بالمثل الاشتقاق في x_0 على اليسار.

3 : الدالة المشتقة وعمليات على الدوال المشتقة

أ- تعريف :

نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .

الدالة : $f':x \to f'(x)$ من I نحو $\mathbb{R}$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على I .

ب- نتائج :

* مشتقة المجموع : إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق في x_0 فإن المجموع $f+g$ دالة قابلة للاشتقاق في x_0

ولدينا : $$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

* مشتقة الجداء : إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق في x_0 فإن الجداء $f.g$ دالة قابلة للاشتقاق في x_0

ولدينا : $(fg)'(x_0)=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0)$

* إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 وكان λ عددا حقيقيا فإن الدالة λf قابلة للاشتقاق في x_0

ولدينا : $(\lambda f)'(x_0)=\lambda.f'(x_0)$

* مشتقة المقلوب : إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 وتحقق $f(x_0)\neq 0$ فإن الدالة $\frac{1}{f}$ قابلة للاشتقاق في x_0

ولدينا : $$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)=-\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

* مشتقة الخارج : إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق في x_0 وكان $g(x_0)\neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق في x_0

ولدينا : $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

4 : مشتقات بعض الدوال الاعتيادية

$f(x)$	$f'(x)$
$\lambda, \lambda\in\mathbb{R}$	**0**
x	**1**
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$
$[u(x)]^n$	$n.[u(x)]^{n-1}.u'(x)$

5 : مشتقة دالة مركبة

مبرهنة :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ وكانت الدالة g قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $f(]a,b[)$ فإن الدالة المركبة gof قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ ومشتقتها هي :

$$(gof)'=(g'of).f$$

أي : لكل x من I لدينا: $$(gof)'(x)=g'(f(x)).f'(x)$$

6 : مشتقة الدالة العكسية

أ- مبرهنة :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا في المجال $[a,b]$.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في $]a,b[$ وكانت دالتها المشتقة f' لا تنعدم فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في المجال $]f(a),f(b)[$ (أو $]f(b),f(a)[$) . ولدينا :

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

ب- مبرهنة :

دالة الجذر من الرتبة n حيث $\left(f(x)=\sqrt[n]{x}\right)$ قابلة للاشتقاق في المجال $]0,+\infty[$ ومشتقتها هي :

$$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

*** خاصية:**

لتكن f و g دالتين بحيث تكون $g \succ 0$ و $f(x)=\left[g(x)\right]^{\frac{1}{n}}$

أي : $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$

إذا كانت g قابلة للاشتقاق فإن f قابلة للاشتقاق ولدينا :

$$f'(x)=\frac{1}{n}\left[g(x)\right]^{\frac{1}{n}-1}.g'(x)$$

*** خاصية :**

إذا كان r ينتمي إلى $\mathbb{Q}^*$ فإن الدالة $x \mapsto x^r$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا : $\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$

جـ جدول بعض المشتقات :

الدالـــة	مشتقتها
$f(g(x))$	$f'(g(x)).g'(x)$
$f^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
$x^r , r\in\mathbb{Q}^*$	$r.x^{r-1}$
$\left[f(x)\right]^r , r\in\mathbb{Q}^*$	$r.\left[f(x)\right]^{r-1}.f'(x)$

7 : المشتقات المتتالية :

تعريف :

* إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في المجال $]a,b[$ وكانت الدالة f' هي نفسها قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ونكتب : f'' .

أو $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ أو $f^{(2)}$.

* بصفة عامة نعرف بالترجع الدوال المشتقة المتتالية لدالة f إذا كانت هذه المشتقات موجودة.

$$f''=(f')' \quad \text{و} \quad f^{(3)}=(f'')',\ldots,f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}\right)'$$

الدالة $f^{(n)}$ تسمى الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f على المجال $]a,b[$.

8 : رتابة دالة وإشارة الدالة المشتقة

أ- مبرهنة :

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في المجال $]a,b[$.

إذا كان لدينا $f'(x)\succ 0$ لكل x من $]a,b[$ فإن f تكون تزايدية قطعا على المجال $[a,b]$.

وإذا كان لدينا $f'(x)\prec 0$ لكل x من $]a,b[$ فإن f تكون تناقصية قطعا على المجال $[a,b]$.

ب- مبرهنة :

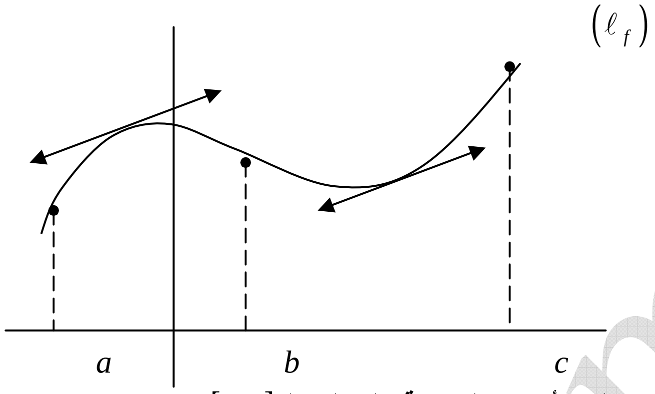
لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في المجال $]a,b[$ وليكن c عنصرا من $]a,b[$.

- إذا كان $f'(x)\succ 0$ لكل x من $]a,c[$ و $f'(x)\prec 0$ لكل x من $]c,b[$ فإن الدالة f تكون لها قيمة قصوية نسبية في c .
- إذا كان $f'(x)\prec 0$ لكل x من $]a,c[$ و $f'(x)\succ 0$ لكل x من $]c,b[$ فإن الدالة f تكون لها قيمة دنوية نسبية في c .

9 : التقعر ونقط الانعطاف

أ- تعريف :

نقول عن تمثيل مبياني لدالة إن له تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة في المجال $]a,b[$ إذا كان المماس في كل نقطة $(x, f(x))$ يوجد تحت التمثيل المبياني.
ونقول إن تقعره موجه نحو الأراتيب السالبة إذا كان المماس في كل نقطة $(x, f(x))$ يوجد فوق التمثيل المبياني.



تقعر (ℓ_f) موجه إلى الأراتيب الموجبة على المجال $[b,c]$.

تقعر (ℓ_f) موجه إلى الأراتيب السالبة على المجال $[a,b]$.

ب- مبرهنة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق

- **إذا كانت دالتها المشتقة f' تناقصية فإن تقعر منحنى f موجه نحو الأراتيب السالبة.**
- **إذا كانت دالتها المشتقة تزايدية فإن تقعر منحنى f موجه نحو الأراتيب الموجبة.**

جـ- مبرهنة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين.

- **إذا كانت الدالة المشتقة الثانية f'' سالبة قطعا فإن تقعر منحنى f موجه نحو الأراتيب السالبة.**
- **إذا كانت الدالة المشتقة الثانية f'' موجبة قطعا فإن تقعر منحنى f موجه نحو الأراتيب الموجبة.**

د- تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق و $P(x_0, f(x_0))$ نقطة من تمثيلها المبياني.
إذا كان تقعر منحنى f عن يمين $P(x_0, f(x_0))$ مخالفا لتقعره عن يسار $P(x_0, f(x_0))$
فإن النقطة $P(x_0, f(x_0))$ تسمى نقطة انعطاف.

هـ- مبرهنة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين.
تكون النقطة $P(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها.

الدوال العددية ذ الرقبة

III- دراسة تغيرات دالة عددية

الفروع اللانهائية

1 : تعريف :

لتكن f دالة عددية و (ℓ_f) منحناها في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نقول إن (ℓ_f) يقبل فرعا لا نهائيا في الحالتين التاليتين :

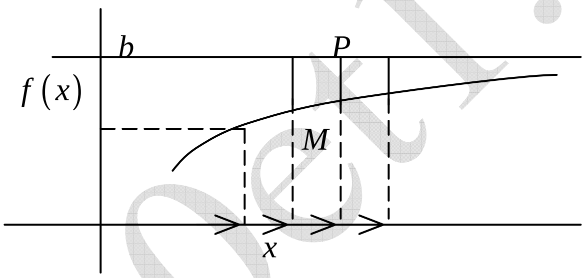
- $f(x)$ تؤول إلى نهاية منتهية عندما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$.
- $f(x)$ تؤول إلى نهاية غير منتهية عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى x_0 على اليمين أو إلى x_0 إلى اليسار أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.

2 : المقارب الموازي لمحور الأفاصيل :

المستقيم ذو المعادلة $y=b$ مقارب لمنحنى f إذا وفقط إذا كان لدينا :

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-b\right)=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-b\right)=0$

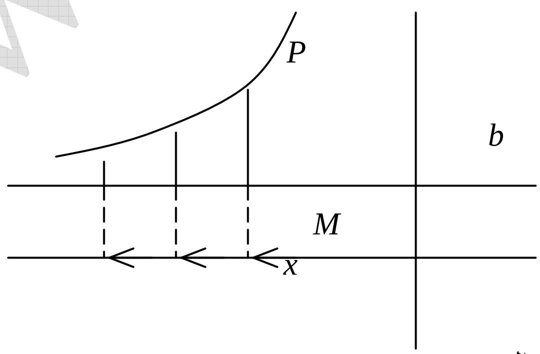
أي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$



$\overline{PM}=f(x)-b$

$\overline{PM}$ يؤول إلى الصفر عندما يؤول x إلى $+\infty$.

المستقيم $y=b$ مقارب لمنحنى f بجوار $+\infty$.



$\overline{PM}=f(x)-b$

$\overline{PM}$ يؤول إلى الصفر عندما يؤول x إلى $-\infty$.

المستقيم $y=b$ مقارب لمنحنى f بجوار $-\infty$.

3 : المقارب المائل :

تعريـف :

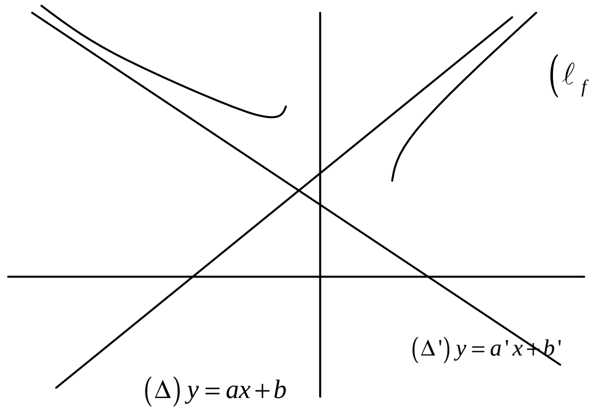
إذا كان لدينا $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ و $\lim_{|x|\to+\infty}\varphi(x=0)$ و $a\neq 0$ فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y=ax+b$ يسمى مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (ℓ) للدالة f .

مبرهنة :

المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا تحققت إحدى العبارتين التاليتين :

* $f(x)-(ax+b)$ تؤول إلى **0** عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو إلى $-\infty$).

* $\frac{f(x)}{x}$ تؤول إلى a عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو إلى $-\infty$) و $f(x)-ax$ تؤول إلى b عندما يؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$).



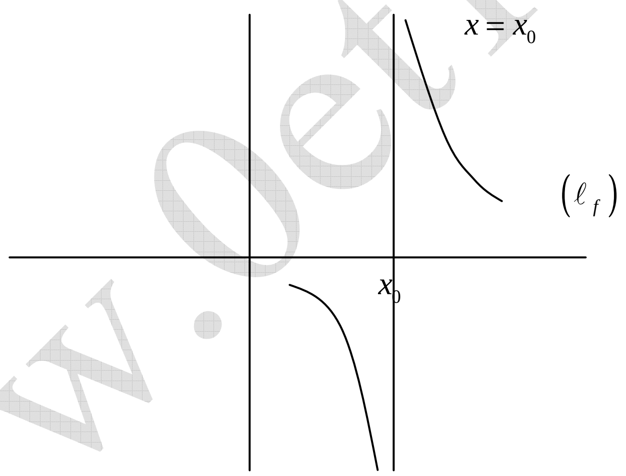
(Δ) مستقيم مقارب لمنحنى f بجوار $+\infty$.

(Δ') مستقيم مقارب لمنحنى f بجوار $-\infty$.

4 : المقارب الموازي لمحور الأراتيب

تعريــف :

المستقيم ذو المعادلة $x=x_0$ مقارب لمنحنى f إذا وفقط إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ (أو $-\infty$) عندما يؤول x إلى x_0 على اليمين (أو على اليسار).



5 : الاتجاه المقارب

لتكن f دالة عددية حيث $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ (أو إلى $-\infty$) عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو $-\infty$).

* إذا كانت $\frac{f(x)}{x}$ تؤول إلى $+\infty$ (أو $-\infty$) عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو $-\infty$) فإننا نقول إن منحنى f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ (أو $-\infty$).

* إذا كانت $\frac{f(x)}{x}$ تؤول إلى **0** عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو $-\infty$) فإننا نقول إن منحنى f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$ (أو $-\infty$).

* إذا كانت $\frac{f(x)}{x}$ تؤول إلى $a\neq 0$ و $f(x)-ax$ تؤول إلى $+\infty$ (أو $-\infty$) عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو $-\infty$) فإننا نقول إن منحنى f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$ (أو $-\infty$).

6 : دراسة الفروع اللانهائية

* لدراسة فرع لانهائي يمكن اتباع الخطوات التالية :

تحديد النهاية $\lim \frac{f(x)}{x}$

- $\lim \frac{f(x)}{x} = 0$ ← اتجاه مقارب هو اتجاه محور الأفاصيل
- $\lim \frac{f(x)}{x} = \infty$ ← اتجاه مقارب هو اتجاه محور الأراتيب
- $\lim \frac{f(x)}{x} = a$ و $a \neq 0$ ← تحديد النهاية $\lim (f(x) - ax)$
  - $\lim (f(x) - ax) = b$ ← مستقيم مقارب معادلته $y = ax + b$
  - $\lim (f(x) - ax) = \infty$ ← اتجاه مقارب هو اتجاه المستقيم $y = ax$

إذا كان بالامكان كتابة $f(x)$ على شكل $f(x) = ax + \varphi(x)$ حيث φ دالة عددية تحقق $\lim\limits_{|x| \to \infty} \varphi(x) = b$ فإنه يمكن تحديد معادلة المستقيم المقارب كما يلي :

نكتب $f(x)$ على الشكل التالي :

$$f(x) = ax + b + (\varphi(x) - b)$$

ومنه فإن $y = ax + b$ هي معادلة لمقارب لمنحنى f .

لأن $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (\varphi(x) - b) = 0$

تصميم دراسة دالة

لدراسة وتصميم دالةعددية f نتبع الخطوات التالية :

1) أ- تحديد مجموعة تعريف f ثم تحديد مجموعة الدراسة.

ب- دراسة منحى تغيرات الدالة f على كل مجال من مجالات مجموعة التعريف باستعمال الدالة المشتقة (إذا كان ذلك ضروريا وإذا كانت f قابلة للاشتقاق).

جـ- الدراسة عند محدات مجموعة التعريف.

د- تلخيص النتائج في جدول للتغيرات.

2) وإذا أردنا أن نرسم منحنى f فإننا نضيف ما يلي :

أ- دراسة الفروع اللانهائية.

ب- دراسة التقعر (إذا كان ذلك ضروريا).

ج- رسم المنحنى مع ذكر بعض خاصياته الهندسية (التماثلات المماسات أو أنصاف المماسات في نقط خاصة ...)